МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
45 (1993), 7–10

UDC 515.127.1
оригинални научни рад
научная работа

СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТИ dm НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. Елич

Резюме. Изучаются свойства дименсионной функции dm в классе нормальных пространств.

1. Введение

В основе понятия размерности dm топологических пространств лежат понятие нерва открытого покрытия и понятие размерности ds частично упорядоченных множеств в смысле Душник-Миллера.

Определение 1.1. (Аднаджевич) Пусть X топологическое пространство. Положим, что: $\operatorname{dm}\emptyset = -1$; $\operatorname{dm} X = 0$ если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать покрытие чей нерв совершенно неупорядоченное множество; $\operatorname{dm} X \leq n$ $(n > 0)$ если в каждое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X можно вписать орктытое покрытие $\mathcal{V}$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$; $\operatorname{dm} X = n$ если $\operatorname{dm} X \leq n$ а $\operatorname{dm} X \leq n-1$ не справедливо; $\operatorname{dm} X = \infty$ если неравенство $\operatorname{dm} X \leq n$ не имеет место ни для какого n, $1 \leq n < \infty$.

В работе будут использованы и следующие определения и предложения:

Определение 1.2. (Смирнов) Подпространство A нормального пространства X назовем нормально расположенным в X, если в любой окрестности O множества A найдётся множество $B \supseteq A$ типа F_σ в X.

Предложение 1.3. *Всякое F_σ множество A нормального пространства X есть нормальное подпространство от X.*

Лемма 1.4. (Чех) *Пусть A подпространство наследственно нормального пространства X. Тогда для любого отркытого в A, конечного*

AMS Subject Classification (1980): 54 F 45

Рад финансира Фонд за науку Србије преко пројекта Математичког института – број 0401A

покрытия $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *пространства* A *существует система* $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *такая, что:* $V_i \subset U_i$, V_i *открыти в* X *и система* $\mathcal{V}$ *подобна системе* $\mathcal{U}$.

2. Свойства размерности dm

Предложение 2.1. *Пусть* B *подмножество нормального пространства* X *имеет в* X *тип* F_σ. *Тогда* $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Доказательство. Пусть B типа F_σ. Тогда B можно представить в виде счетной суммы замкнутых в X множеств B_i, $i = 1,\ 2,\ \dots$ и будеть $\operatorname{dm} B_i \leq \operatorname{dm} X$ для каждого $i = 1,\ 2,\ \dots$. В силу теоремы суммы $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} B_i + 1 \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$. ■

Лемма 2.2. *Пусть окрестность* O *подмножества* A *нормального пространства* X *покрыта открытыми в* X *множествами* W_i, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$, *и существует такое нормальное подпространство* B *пространства* X, *что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \leq n$. *Тогда в покрытие* $\mathcal{V} = \{ W_i \cap A \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *множества* A *можно вписать открытое в* A *покрытие* $\mathcal{U}$ *такое, что* $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n + 1$.

Доказательство. В покрытие $\mathcal{W} = \{ W_i \cap B \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ можно вписать конечное открытое в B покрытие $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ такое, что $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n + 1$. Тогда покрытие $\mathcal{U} = \{ V_i \cap A \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ множества A, открыто в A, вписано в $\mathcal{W}$ и $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n + 1$. ■

Предложение 2.3. *Пусть* A *нормальное подпространство нормального пространства* X. *Тогда* $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$ *тогда и только тогда когда для любой окрестности* O *множества* A *существуеть нормальное подпространство* B *пространства* X *такое, что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \leq \operatorname{dm} X$.

Доказательство следует из леммы 2.2. ■

Из предложений 2.1 и 2.3 вытекает

Предложение 2.4. *Пусть подпространство* A *нормально расположено в нормальном пространстве* X. *Тогда* $\operatorname{dm} A \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Предложение 2.5. *Пусть* B *произвольное подпространство совершенно нормального пространства* X. *Тогда* $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Доказательство. Так как любое подпространство совершенно нормального пространства нормально расположено в X, доказательство следует из предложения 2.4. ■

Предложение 2.6. *Пусть* $X = d \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *дискретна сумма нормальных пространств. Тогда* $\operatorname{dm} X \leq \sup_{\alpha \in A} \operatorname{dm} X_\alpha$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{dm} X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$, и $\mathcal{W} = \{ W_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ конечное открытое покрытие пространства X. Для каждого $\alpha \in A$ в покрытие $\{ W_i \cap X_\alpha \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ впишем, открытое в X_α покрытие $\mathcal{V}_\alpha$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_\alpha) \le n+1$. Тогда система $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{V}_\alpha$ есть открытое покрытие от X, вписанное в покрытие $\mathcal{W}$ и $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \le n+1$ (так как X_α дизъюнктны, см. [2]). Оттуда $\operatorname{dm} X \le n$. ■

Предложение 2.7. *Пусть $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, наследственно нормальное пространство. Пусть $\operatorname{dm} A \le n$ и $\operatorname{dm} B \le n$ $(n > 0)$, где A замкнутое а B открытое подпространство от X. Тогда $\operatorname{dm} X \le n$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ конечное открытое покрытие пространства X. Тогда $\mathcal{U}_A = \{ U_i \cap A \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ покрывает A а $\mathcal{U}_B = \{ U_i \cap B \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ покрывает B. Так как $\operatorname{dm} A \le n$ и $\operatorname{dm} B \le n$, в покрытие $\mathcal{U}_A$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_A$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_A) \le n+1$ а в покрытие $\mathcal{U}_B$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_B$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_B) \le n+1$. По лемме 1.4 существуют системы $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ и $\mathcal{W} = \{ W_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ такие, что V_i и W_i открыты в X, $V_i \subset U_i \cap A$, $W_i \subset U_i \cap B$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \le n+1$ и $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \le n+1$. Так как $V_i \cap W_i = \emptyset$ для $i = 1, 2, \dots, k$, имеем $\operatorname{ds}\mathcal{N}(V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_k) \le n+1$, откуда $\operatorname{dm} W \le n$. ■

Предложение 2.8. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть A замкнуто в X, $\operatorname{dm} A \le n$ $(n > 0)$ и $\operatorname{dm} B = 0$. Тогда $\operatorname{dm} X \le n+2$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ конечное открытое покрытие пространства X. Тогда $\mathcal{U}' = \{ U_i \cap A \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ конечное открытое покрытие от A. Так как $\operatorname{dm} A \le n$ то в это покрытие можно вписать конечное открытие в X (см. [2]) покрытие $\mathcal{V}' = \{ V_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}') \leqslant n+1$. Обозначим $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^k V_i$ замкнутое подпространство от B. Тогда $\operatorname{dm} F = 0$ и существует система $\mathcal{W} = \{ W_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ так, что $B \subset \bigcup_{i=1}^k W_i$, $\mathcal{W}$ вписано в $\mathcal{U}$, W_i открыты и $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \le 2$. Обозначим $\eta = \{W_1, \dots, W_k, V_1, \dots, V_k\}$ открытое конечное покрытие от X вписано в $\mathcal{U}$. Будет $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\eta) \le n+3$ и оттуда $\operatorname{dm} X \le n+2$. ■

Нетрудно показать следующие два предложения:

Предложение 2.9. *Пусть $X = A \cup B$ наследственно нормальное пространство и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $\operatorname{dm} A = 0$ и $\operatorname{dm} B = 0$. Тогда $\operatorname{dm} X \le 1$.*

Предложение 2.10. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть $\operatorname{dm} A = 0 = \operatorname{dm} B$ и A замкнуто в X. Тогда $\operatorname{dm} X \le 3$.*

Предложение 2.11. *Пусть X топологическое пространство.* $\operatorname{dm} X = 0$ *если и только если* $\operatorname{Ind} X = 0$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Ind} X \le \dim X$ и $\dim X \le \operatorname{dm} X$ то $\operatorname{Ind} X \le \operatorname{dm} X$. Пусть $\operatorname{Ind} X = 0$. Тогда X нормальное пространство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ произвольное открытое покрытие от X. Существует комбинаторно вписано в $\mathcal{U}$ замкнутое покрытие $\mathcal{V}$. Так как $\operatorname{Ind} X = 0$

существует вписано в $\mathcal{U}$ покрытие $\mathcal{W}$ которое состоит из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств (см. [1]). Нерв этого покрытия совершенно неупорядоченное множество. Потому $\operatorname{dm} X = 0$. ■

Предложение 2.12. *Пусть X наследственно нормальное пространство. Тогда следующие свойства эквивалентны между собой:*

(1) для каждого подпространства A от X, имеем $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$;

(2) для каждого открытого подпространства Γ от X, имеем $\operatorname{dm}\Gamma \leq \operatorname{dm} X$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть X выполнает свойство (2). Пусть A подпространство от X и $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, 2 \dots, k\}$ конечное открытое покрытие от A. Пусть V_i для $i = 1, 2, \dots, k$ открытие подмножества от X такие, что $U_i = A \cap V_i$. Так как открытое подпространство $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ от X имеет $\operatorname{dm}\Gamma \leq \operatorname{dm} X = n$ $(0 < n < \infty)$ то существует конечное открытое подпокрытие $\mathcal{W}$ от $\{V_i \mid i = 1, 2 \dots, k\}$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n + 1$. Тогда семейство $\mathcal{W}|A$ есть конечное открытое покрытие от A, вписанное в $\mathcal{U}$ и $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}|A) \leq n + 1$. Оттуда $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$. ■

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] П. С. Александров, *Введение в теорию размерносты*, Наука, Москва 1973

[**2**] Д. Аднађевић, *О једној врсти димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 2, 1965, 137–146

[**3**] Д. Аднађевић, *Нека својства једне врсте димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 4, 1965, 239–243

[**4**] Д. Аднаджевич, *Некоторые свойства размерности* dm *нормальных пространств*, Мат. весник **3 (18)**, 4, 1966, 261–264

[**5**] Г. Л. Замбахидзе, Ф. С. Товодрос, *О размерности* dm *и её применениях в классификации локально связных континуумов*, Сооб. АНГССР **84**, 1, 1976, 45–51

(поступило 29.10.1992.)

Пољопривредни факултет

Немањина 6

11080 Земун, Југославија